

Iwasawa theory for weighted graphs ^{*}

(荷重グラフの岩澤理論)

九州大学 大学院マス・フォア・イノベーション関係学府
足立 大雅 (Taiga ADACHI) [†]

概要

イデアル類群に対して始まった岩澤理論の研究は、その後、楕円曲線や p 進 Galois 表現等の岩澤理論へと高度な発展を遂げている。別方向の発展として、結び目理論やグラフ理論のように整数論とは異なる分野や対象に対する岩澤理論的現象の研究が挙げられる。特に、グラフの岩澤理論は 2020 年頃から論文が発表され始め、近年大きな発展を遂げている比較的新しい分野である。

1 導入

整数論において、代数体のイデアル類群の位数 (類数) や構造を調べることは非常に重要な研究テーマである。岩澤健吉は、代数体のある無限族における類数の漸近挙動を記述することに成功した (岩澤類数公式)。岩澤類数公式は本研究の出発点となる重要な公式なので、その主張について説明する。 p を素数とする。代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_p$ と埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する。 v_p を $v_p(p) = 1$ で正規化された $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の p 進付値とする。代数体 K に対して、 $\text{Cl}(K)$ で K のイデアル類群を表すものとする。

定理 1.1 ([Iwa59], [CM81, Theorem I]). K を代数体, K_∞/K を $\mathbb{Z}_p^d$ -拡大 ($d \in \mathbb{N}$), K_n を $\mathbb{Z}_p^d$ の部分群 $(p^n \mathbb{Z}_p)^d$ に (無限次 Galois 理論により) 対応する K_∞/K の中間体とする。つまり、各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\text{Gal}(K_n/K) \cong (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^d$ となる、以下の K の代数拡大塔を考える。

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$$

このとき、非負整数 μ, λ が存在して

$$v_p(\#\text{Cl}(K_n)) = (\mu p^n + \lambda n + O(1))p^{(d-1)n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

全ての辺に重み 1 (自明な重み) がかかるグラフに対しては、定理 1.1 の類似が以下の先行研究により得られている。ただし、 $d \geq 2$ の場合には定理 1.1 よりも精密な形が得られている。

- ($d = 1$ のとき) Gonet [Gon22], Vallières [Val21], McGown–Vallières ([MV23], [MV24]).
- ($d \geq 2$ のとき) DuBose–Vallières [DV23], Kleine–Müller [KM24a].

^{*} 本稿は、水野宏亮氏 (名古屋大学) と館野莊平氏 (名古屋大学) との共同研究に基づく。

[†] E-mail: adachi.taiga.873@s.kyushu-u.ac.jp

証明の手法として, (i) グラフの Jacobian を調べる加群論的アプローチ, (ii) グラフの Artin–Ihara L 関数の (導関数の) 特殊値を調べる解析的アプローチの 2 つが挙げられる. 上述した先行研究では, [Gon22] と [KM24a] の 2 つが (i) の手法で, それ以外は (ii) の手法をとっている. さらに Ray–Vallières [RV22] は, (ii) の手法により, 自明な重みを持つグラフの Galois 被覆による μ と λ の変化を $d = 1$ の場合に記述する公式を得ている. これは整数論における木田の公式のグラフ類似となっている. 本研究では, (ii) の手法を用いて以下の結果を得ることができた.

- 定理 1.1 の荷重グラフにおける類似 (の精密化).
- Ray–Vallières [RV22] の, $d \geq 2$ で荷重グラフの場合を含む形への一般化.
- 定理 1.1 の類似に用いた手法や考えを応用して, グラフの離散時間量子ウォークの遷移行列の固有多項式に固有値以外の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元を代入したときの値の漸近挙動の記述.

2 グラフ理論の用語

本節では, 主結果の説明に必要なグラフ理論の用語について述べる. 本稿はグラフの岩澤理論という分野の紹介も兼ねているので, 以下に (筆者の好みではあるが) 文献を挙げておく. (自明な) グラフの被覆や Artin–Ihara L 関数については, Terras 氏のテキスト [Ter11] で述べられている. Voltage assignment を用いた被覆や L 関数の定義など, 岩澤理論に必要な概念については, 例えば, Gonet 氏の博士論文 [Gon21], 片岡氏の論文 [Kat24a], McGown–Vallières の論文 [MV24] を挙げておく.

2.1 グラフの被覆

定義 2.1. 荷重対称有向グラフ (weighted symmetric digraph) X とは, 以下のデータからなる組 $(V_X, \mathbb{E}_X, \text{inc}, \bar{\cdot})$ のことである:

頂点集合 V_X , 有向辺からなる集合 $\mathbb{E}_X$, 重み関数 $w_X : \mathbb{E}_X \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, 写像 $\text{inc} : \mathbb{E}_X \ni e \mapsto (o_X(e), t_X(e)) \in V_X \times V_X$, 写像 $\bar{\cdot} : \mathbb{E}_X \rightarrow \mathbb{E}_X$ で, 以下の条件を満たすようなもの.

- $\bar{e} \neq e, \bar{\bar{e}} = e$,
- $o_X(\bar{e}) = t_X(e), t_X(\bar{e}) = o_X(e)$.

$o(e)$ (resp. $t(e)$) を $e \in \mathbb{E}_X$ の始点 (resp. 終点) といい, $\bar{e}$ を e の **inverse edge** という. 単に **荷重有向グラフ (weighted digraph)** というときは, inverse edge $\bar{e}$ の存在を仮定しないものとする.

以下, 本稿では X を荷重対称有向グラフとする. また, 本稿で扱われるグラフは全て有限グラフ, すなわち $\#V_X, \#\mathbb{E}_X < \infty$ とする. さらに, $V_X := \{v_1, \dots, v_m\}$, $\mathbb{E}_{ij} := \{e \in \mathbb{E}_X \mid o(e) = v_i, t(e) = v_j\}$, $\mathbb{E}_{X,v} := \{e \in \mathbb{E}_X \mid o(e) = v\}$ ($v \in V_X$) とおき, $v \in V_X$ の次数を $d_v := \#\mathbb{E}_{X,v}$ と定義する.

定義 2.2. X の隣接行列 (adjacency matrix, weighted matrix) $W(X)$ を

$$W(X) := \left(\sum_{e \in \mathbb{E}_{ij}} w(e) \right)_{i,j}$$

と定義する.

定義 2.3. X' を荷重有向グラフとする.

$$X' \text{ が } X \text{ の部分グラフである} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \bullet V_{X'} \subseteq V_X, \mathbb{E}_{X'} \subseteq \mathbb{E}_X, \\ \bullet w_X|_{\mathbb{E}_{X'}} = w_{X'}, \text{inc}_X|_{\mathbb{E}_{X'}} = \text{inc}_{X'}. \end{cases}$$

以降, X, Y を連結荷重対称有限有向グラフとする.

定義 2.4. 射 $f: Y \rightarrow X$ を二つの写像 $f_V: V_Y \rightarrow V_X$ と $f_E: \mathbb{E}_Y \rightarrow \mathbb{E}_X$ の組 (f_V, f_E) で, 任意の $e \in \mathbb{E}_Y$ に対して以下の条件

- $\text{inc}_X(f_E(e)) = (f_V(o_Y(e)), f_V(t_Y(e)))$,
- $\overline{f_E(e)} = f_E(\bar{e})$,
- $w_X(f_E(e)) = w_Y(e)$

を満たすものとする.

定義 2.5. 射 $f: Y \rightarrow X$ が同型である $\stackrel{\text{def}}{\iff} f_V, f_E$ が全単射である.

Y と X の間に同型射が存在するとき, $Y \cong X$ と表す.

$$\text{定義 2.6. 射 } \pi: Y \rightarrow X \text{ が被覆である} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \bullet \pi_V \text{ と } \pi_E \text{ が全射である.} \\ \bullet \text{ 任意の } v \in V_Y \text{ に対して, } \pi_E|_{\mathbb{E}_{Y,v}}: \mathbb{E}_{Y,v} \rightarrow \mathbb{E}_{X,\pi_V(v)} \\ \text{が全単射である (局所同相性).} \end{cases}$$

Remark 2.7. 上記の被覆は正確には「不分岐」被覆である. 本稿では不分岐被覆のみを扱う. 分岐被覆の岩澤理論に関しては Gambheera–Vallières [GV24], 片岡 [Kat24b], Kundu–Müller [KM24b] により研究されている.

被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ に対して, その被覆変換群を $\text{Aut}_\pi(Y) := \{ \text{同型射 } \sigma: Y \xrightarrow{\sim} Y \mid \pi \circ \sigma = \pi \}$ と定める.

定義 2.8. 被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ が **Galois** である $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $v \in V_X$ に対して, $\# \pi_V^{-1}(v) = \# \text{Aut}_\pi(Y)$.

このとき, $\text{Gal}(Y/X) := \text{Aut}_\pi(Y)$ と表し, これを **Galois 被覆 Y/X の Galois 群** という.

2.2 Weighted complexity

本小節では, 整数論における類数の荷重グラフ類似にあたる weighted complexity を導入する.

定義 2.9. T を X の部分グラフ, $v \in V_X$ とする. T が v を根とする全域有向木である $\stackrel{\text{def}}{\iff} V_T = V_X$ であり, 任意の $v' (\neq v) \in V_X$ に対して, 道 $C = e_1 \dots e_r$ で $o(e_1) = v$ かつ $t(e_r) = v'$ となるものが一意に存在する.

定義 2.10. X を連結荷重対称有向グラフとし, $W(X)$ が対称行列であるとする. X の **weighted**

complexity を

$$\kappa^W(X) := \sum_T \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_T} w(e) \right)$$

と定義する. ただし, T は $v \in V_X$ を根とする X の全域有向木全体を渡るものとする.

Remark 2.11. Weighted complexity について, 以下の補足しておく.

- $W(X)$ が対称行列となるときは, $\kappa^W(X)$ は根 v の取り方に依存しない.
- X が自明な重みを持つ, すなわち, 任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して $w(e) = 1$ となるときは, $\kappa^W(X)$ は v を根とする X の全域有向木の数に一致する.

2.3 $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔

定義 2.12. G を群とする. 写像 $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow G$ が **voltage assignment** である $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して, $\alpha(\bar{e}) = \alpha(e)^{-1}$.

G を有限群, $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow G$ を voltage assignment とする.

Voltage assignment を用いて, voltage cover $Y := X(G, \alpha)$ を以下の手順で構成することができる:

$$\begin{aligned} V_Y &:= V_X \times G, \quad \mathbb{E}_Y := \mathbb{E}_X \times G, \quad w_Y(e, g) := w_X(e) ((e, g) \in \mathbb{E}_Y) \\ o_Y(e, g) &:= (o_X(e), g), \quad t_Y(e, g) := (t_X(e), g\alpha(e)), \quad \overline{(e, g)} := (\bar{e}, g\alpha(e)) \end{aligned}$$

により定義することができる. 以下の事実が, 重みが自明な場合と同様にして示せる.

命題 2.13 (cf. [Gon21, Theorem 8]). $X(G, \alpha)$ が連結グラフであるならば, $X(G, \alpha)/X$ は Galois 被覆であり, その Galois 群は G と同型である. 逆に, Y/X が (連結) 有限 Galois 被覆であり, その Galois 群を G とするならば, voltage assignment $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow G$ が存在して $Y \cong X(G, \alpha)$ となる.

$\Gamma := \mathbb{Z}_p^d$, $\Gamma_n := (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ とする. $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, α と自然な射影 $p_n : \Gamma \rightarrow \Gamma_n$ の合成 $p_n \circ \alpha$ を α_n と表すことにする. Γ_n は有限群なので先述した構成法を適用することができ, compatible system $\{X_n := X(\Gamma_n, \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, すなわち, 任意の $k' > k$ に対して, 以下の図式

$$\begin{array}{ccc} X_k & \longleftarrow & X_{k'} \\ & \searrow & \swarrow \\ & X & \end{array}$$

が可換となるような族が構成できる. ただし, 射 $X_k \leftarrow X_{k'}$ は自然な準同型 $\Gamma_k \leftarrow \Gamma_{k'}$ から誘導されるものである. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n/X が Galois 被覆となるときに

$$X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \dots \leftarrow X_n \leftarrow \dots \quad (1)$$

を (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔という.

Remark 2.14. Voltage assignment $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を与えれば $\{X_n\}_{n \geq 0}$ を構成することは出来るが, X_n/X が Galois 被覆になるとは限らない. X_n が連結であることと X の Galois 被覆であることは同値である. Voltage cover が連結になる必要十分条件は [Gon21, Theorem 4] により与えられている.

3 主定理と具体例

本節では主定理とその具体例を述べる. 具体例の図では見易さを重視して, 任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して, e と $\bar{e}$ をまとめて一本の無向辺で表している. (任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して $w(e) = w(\bar{e})$ が成り立つ場合には, このような表記は正統化されることに注意する.) 始めに, 岩澤類数公式の荷重グラフ類似について述べる. 以降, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\kappa_n^W := \kappa^W(X_n)$ とする.

定理 3.1 ([AMT24, Theorem 3.9]). X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔 (1) を考える. 以下の条件

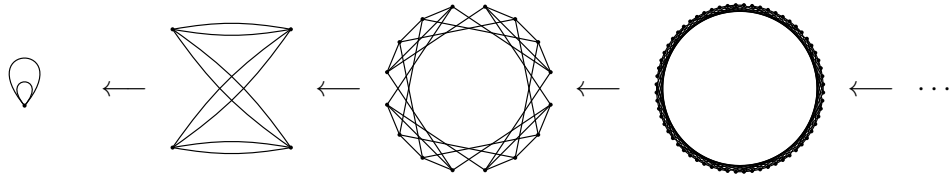
- 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n が連結であり, $W(X_n)$ が対称行列となる.
- 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\kappa_n^W \neq 0$.

を仮定する. このとき, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{d-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \nu \in \mathbb{Q}$ が存在して, 十分大きな全ての n に対して

$$v_p(\kappa_n^W) = (\mu p^n + \lambda n) p^{(d-1)n} + \left(\sum_{i=1}^{d-1} (\mu_i p^n + \lambda_i n) p^{(d-i-1)n} \right) + \nu.$$

Remark 3.2. 定理 3.1 の 2 つ目の条件が満たされない, すなわち, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\kappa_{n_0}^W = 0$ になるときは, 任意の $n \geq n_0$ に対して $\kappa_n^W = 0$ となることが命題 4.2 の帰結として得られる.

例 3.1 ([AMT24, Example 25]). $p = 2, d = 2, X$ を 1 つの頂点と 2 つのループ (内側から順に e_1, e_2 とする) を持つグラフで重み関数を $w_X(e_i) = w_X(\bar{e}_i) := a_i \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ ($i = 1, 2$) とする. Voltage assignment を $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ を $\alpha(e_1) = (0, 1), \alpha(e_2) = (1, 0)$ により定めると, (X, α) の $\mathbb{Z}_2^2$ -塔は



となる. 岩澤不変量は, $\mu = \max\{v_2(a_1), v_2(a_2)\}, \lambda = 2$ となる.

次に, 木田の公式の荷重グラフ類似について述べる.

定理 3.3 ([AMT24, Theorem 4.1]). X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔 (1) を考える. $\pi : Y \rightarrow X$ を次数 $[Y : X] := \# \text{Gal}(Y/X)$ が p 冪の Galois 被覆とする. 以下の条件が満たされるとする.

- 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $Y_n := Y(\Gamma_n, \alpha_n \circ \pi_{\mathbb{E}})$ が連結であり, $W(X_n), W(Y_n)$ は対称行列.

- Y/X が部分被覆として如何なる X_n も含まない.
- 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\kappa^W(Y_n) \neq 0$.

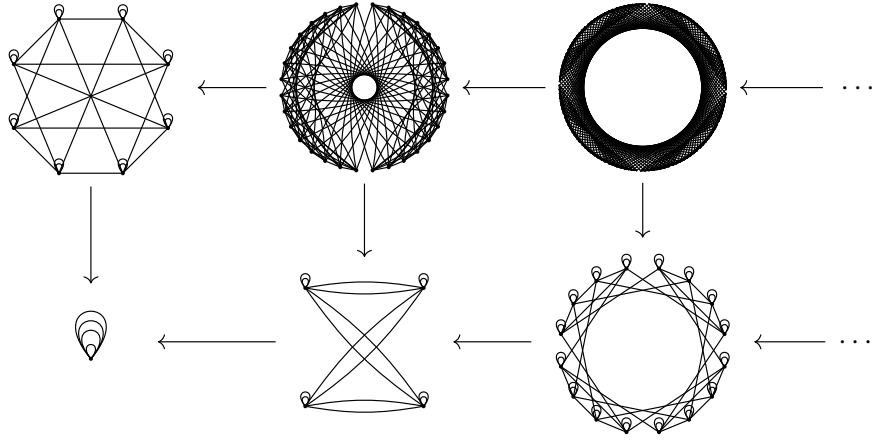
以下の compatible な 2 つの $\mathbb{Z}_p^d$ -塔を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} Y = Y_0 & \longleftarrow & Y_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & Y_n & \longleftarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_n & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

このとき, $\mu(X, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \mu(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = 0$ であり, これらの同値な条件が満たされるとき, 以下の関係式が成り立つ.

$$\lambda(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = \begin{cases} [Y : X](\lambda(X, \alpha) + 1) - 1 & (d = 1), \\ [Y : X]\lambda(X, \alpha) & (d \geq 2). \end{cases}$$

例 3.2 ([AMT24, Example 26]). $p = 2, d = 2$ とする. X を頂点 1 つ, ループ 4 つ (内側から順に e_1, e_2, e_3, e_4 とする) からなるグラフとする. $w_X(e_i) = w_X(\bar{e}_i) := a_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ ($1 \leq i \leq 4$) とする. ただし, $a_1, a_2 \neq 0$ とする. Voltage assignment $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \mathbb{Z}_2^2$ を $\alpha(e_1) = (0, 1), \alpha(e_2) = (1, 0), \alpha(e_3) = \alpha(e_4) = 0$ により定める. $Q_8 := \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1, \tau^2 = \sigma^2, \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を四元数群, voltage assignment $\beta : \mathbb{E}_X \rightarrow Q_8$ を $\beta(e_1) = \beta(e_2) := 1_{Q_8}, \beta(e_3) := \sigma, \beta(e_4) := \tau$ により定め, $Y := X(Q_8, \beta)$ とおく. このとき, 定理 3.3 における図式は以下ようになる.



§4 で定義する $Q_{X, \alpha}(T)$ と $Q_{Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}}(T)$ を用いて計算すると

$$\mu(X, \alpha) = \mu(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = \max\{v_2(a_1), v_2(a_2)\}, \lambda(X, \alpha) = 2, \lambda(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = 16 = \lambda(X, \alpha) \times \#Q_8$$

となり, X と Y に対して定理 3.3 が成り立つことが確認できた.

4 証明の概要

本節では定理 3.1 の証明の概要を述べる. 詳細に関しては, 他の定理の証明も含め [AMT24] を参照してほしい. 第 1 節でも述べたように, グラフの Artin–Ihara L 関数を用いて証明する. X ,

$\alpha_n : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma_n$, 指標 $\psi \in \widehat{\Gamma}_n := \text{Hom}(\Gamma_n, \overline{\mathbb{Q}})$ に対して, Artin–Ihara L 関数 $L_X(\psi, \alpha_n, t) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[[t]]$ が定義される (詳細は [AMT24, §2.3], [MS04], [Sat07] を参照). グラフの L 関数に対しては, **3 項行列式公式 (伊原型行列式表示)** と呼ばれる以下の重要な公式がある.

定理 4.1 ([Sat07, Theorem 6]). 荷重対称有向グラフ X と任意の $\psi \in \widehat{\Gamma}_n$ に対して

$$L_X(\psi, \alpha_n, t)^{-1} = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}\#\mathbb{E}_X - \#V_X} \det \left(\mathbf{I}_m - t \sum_{\sigma \in \Gamma_n} \psi(\sigma) \mathbf{W}(\sigma) + t^2 (\mathbf{D}(X) - \mathbf{I}_m) \right). \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{I}_m$ は m 次単位行列を表し, 2 つの m 次正方行列を $\mathbf{W}(\sigma) := \left(\sum_{\substack{e \in \mathbb{E}_{ij} \\ \alpha_n(e) = \sigma}} w(e) \right)_{i,j}$, $\mathbf{D}(X) := \left(\delta_{ij} \sum_{e \in \mathbb{E}_{X, v_i}} \right)_{i,j}$ とする.

ここで, 式 (2) の右辺の行列式を $h_X(\psi, \alpha_n, t)$ と表すことにする. この h_X を用いることで, κ_n^W と κ_0^W の漸化式を得ることができる.

命題 4.2 ([MS03, Corollary 1] と [AMT24, Theorem 3.2] の帰結). X を荷重対称有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔 (1) を考える. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n が連結で $\kappa_n^W \neq 0$ となるときの, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\kappa_n^W = \frac{\kappa_0^W}{p^{nd}} \prod_{1 \neq \psi \in \widehat{\Gamma}_n} h_X(\psi, \alpha_n, 1). \quad (3)$$

Remark 4.3. 水野–佐藤 [MS03, Corollary 1] では, total weight $\sum_{e \in \mathbb{E}_X} w(e)$ が $2m$ とは一致しない, という条件が課されている. [AMT24, Theorem 3.2] では表現論的手法を用いて, より精密な議論を行うことにより total weight の仮定を外すことに成功した. Total weight の仮定は自明な重みでは Euler 標数 $\chi(X) := \#V_X - (1/2)\#\mathbb{E}_X$ が 0 でない, 言い換えると種数 (cycle の数) が 1 でないという条件になる. しかし, 重みが一般の場合には, 種数が 1 以外のかかなり多くのグラフが除外されてしまう. そういう観点でも, total weight の仮定を外せたのは新規性が高いと言えるだろう.

定義 4.4. $K := \mathbb{Q}_p(\zeta_p, \text{Im } w_X)$, K の整数環を $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K$ とする. m 次正方行列 $\mathbf{W}_\alpha$ を

$$\mathbf{W}_\alpha := \left(\sum_{e \in \mathbb{E}_{ij}} (1 + T_1)^{a_1(e)} \cdots (1 + T_d)^{a_d(e)} w(e) \right)$$

と定義する. ただし, 各 $e \in \mathbb{E}_X$ に対して $\alpha(e) = (a_1(e), \dots, a_d(e)) \in \mathbb{Z}_p^d$ ($a_i(e) \in \mathbb{Z}_p$) とする. さらに $Q_{X,\alpha}(T) \in \Lambda_d \otimes_{\mathcal{O}} K$ を以下のように定義する.

$$Q_{X,\alpha}(T) := Q_{X,\alpha}(T_1, \dots, T_d) := \det(\mathbf{D}(X) - \mathbf{W}_\alpha).$$

$Q_{X,\alpha}$ と L 関数は以下の命題により関連付けられる.

命題 4.5 ([AMT24, Proposition 3.8]). X を荷重対称有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. 任意の指標 $\psi_n = (\psi_n)_{(1)} \otimes \cdots \otimes (\psi_n)_{(d)} \in \widehat{\Gamma}_n$ ($(\psi_n)_{(j)} \in \widehat{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}$) に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$Q_{X,\alpha}(\zeta_{\psi_n} - 1) := Q_{X,\alpha}((\psi_n)_{(1)}(1) - 1, \dots, (\psi_n)_{(d)}(1) - 1) = h_X(\psi_n, \alpha_n, 1). \quad (4)$$

上記命題を用いて定理 3.1 を証明できる. $W_n := \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}} \mid \zeta^{p^n} = 1\}$ とする. 式 (3) により

$$\begin{aligned}
v_p(\kappa_n^W) &= v_p(\kappa_0^W) - nd + \sum_{1 \neq \psi_n \in \widehat{\Gamma}_n} v_p(h_X(\psi_n, \alpha_n, 1)) \\
&\stackrel{(4)}{=} v_p(\kappa_0^W) - nd + \sum_{1 \neq \psi_n \in \widehat{\Gamma}_n} v_p(Q_{X,\alpha}(\zeta_{\psi_n} - 1)) \\
&= v_p(\kappa_0^W) - nd + \sum_{\zeta \in W_n^d \setminus \{(1, \dots, 1)\}} v_p(Q_{X,\alpha}(\zeta - 1))
\end{aligned} \tag{5}$$

となる. ここで式 (5) の第 3 項の和に対して, [CM81, Theorem 1.7] と [Mon81, Theorem 5.6] (+[AMT24, §3.2] による修正) を用いることで定理 3.1 を示すことができる.

Remark 4.6. 定理 3.1 における μ と λ に関しては, $Q_{X,\alpha}(T)$ を用いて明示的に与えることができる.

5 グラフの離散時間量子ウォークへの応用

岩澤型公式の証明の手法を応用して, グラフにおける離散時間量子ウォークの遷移行列の固有多項式の漸近挙動を記述することができる. 本節では, $\mathbb{E}_X := \{e_1, \dots, e_l, e_{l+1} := \bar{e}_1, \dots, e_{2l} := \bar{e}_l\}$ とする. 引き続き $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔 (1) を考える. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\mathbf{W}(X_n)$ は必ずしも対称行列とは限らないものとし, $2l_n := \#\mathbb{E}_{X_n}$, $w_{X_n}(e) := 2/d_{o(e)}$ とする.

Remark 5.1. 今回は不分岐被覆を考えているので, 局所同相性により, 上記で与えた X_n の重み関数 w_{X_n} は voltage assignment により定まる重みと一致する.

定義 5.2. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と各 $1 \leq i, j \leq 2l_n$ に対して

$$u_{ij} := \begin{cases} 2/d_{o(e_i)} & (o(e_i) = t(e_j), \bar{e}_i \neq e_j), \\ 2/d_{t(e_i)} - 1 & (\bar{e}_i = e_j), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定め, $2l_n$ 次正方行列 $\mathbf{U}_n$ を $\mathbf{U}_n := (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2l_n}$ と定義する. この $\mathbf{U}_n$ を X_n における離散時間量子ウォークの遷移行列という.

時間 $t = t_0$ における, 量子ウォークの挙動は $\mathbf{U}_n^{t_0}$ により定まる. そこで, $\mathbf{U}_n$ の固有値を調べるのが重要となるが, 以下の結果が知られている.

定理 5.3 ([EHSW06, Proposition 2.2] と [KS12, Corollary 4.2] の帰結). X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔 (1) を考える. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n は連結で $w_{X_n}(e) = 2/d_{o(e)}$ とする. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\mathbf{U}_n$ の $2l_n$ 個の固有値は以下の集合

$$\left\{ \frac{1}{2} a_{\mathbf{W}} + \frac{1}{2} i \sqrt{4 - a_{\mathbf{W}}^2} \mid a_{\mathbf{W}} \text{ は } \mathbf{W}(X_n) \text{ の固有値} \right\} \cup \{\pm 1\}$$

に属する.

上記の定理を踏まえて、固有多項式に固有値以外の値を代入して得られる値の p 進付値の、 $\mathbb{Z}_p^d$ -塔における漸近挙動を調べることが本研究の動機の一つとなっており、以下の結果を得ることができた。

定理 5.4 ([AMT24, Theorem 7.3]). X を連結荷重対称有限有向グラフ、 $\alpha : \mathbb{E}_X \rightarrow \Gamma$ を voltage assignment とする. (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$ -被覆塔 (1) を考える. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、 X_n は連結で $w_{X_n}(e) = 2/d_{o(e)}$ とする. a を、任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して U_n の固有値にならないような $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元とする. このとき、 $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{d-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \nu \in \mathbb{Q}$ が存在して、十分大きな全ての n に対して

$$v_p(\det(a\mathbf{I}_{2l_n} - U_n)) = (\mu p^n + \lambda n)p^{(d-1)n} + \left(\sum_{i=1}^{d-1} (\mu_i p^n + \lambda_i n)p^{(d-i-1)n} \right) + \nu.$$

定理 5.4 の証明の概要. 今野-佐藤 [KS12, Theorem 4.1] により示された以下の重要な関係式

$$\zeta_{X_n}(t)^{-1} = \det(\mathbf{I}_{2l_n} - tU_n)$$

が証明の鍵になる. この式により

$$\det(\mathbf{I}_{2l_n} - tU_n) = (1 - t^2)^{-p^{dn}\chi(X)} \prod_{\psi_n \in \widehat{\Gamma}_n} h_X(\psi_n, \alpha_n, t)$$

が得られる. ここで、 $u := 1/t$ として分母の u を払い、 u に a を代入することで、定理 3.1 と同様の議論で定理 5.4 を示すことができる. 岩澤不変量を計算する際には、 $Q_{X, \alpha}$ の代わりに以下の Q_a を用いる.

$$Q_a(T_1, \dots, T_d) := \det(a^2 \mathbf{I}_m - a \mathbf{W}_\alpha + (\mathbf{D}^W(X) - \mathbf{I}_m)).$$

□

謝辞. 共同研究者であり、本稿作成にもご協力くださった水野宏亮氏 (名古屋大学) と館野莊平氏 (名古屋大学)、グラフの岩澤理論に関して多くの示唆を与えてくださった片岡武典先生 (東京理科大学)、本稿の誤植修正にご尽力いただいた室岡亮祐氏 (名古屋大学) に深く感謝申し上げます. また、本研究において筆者は九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラムの支援を受けております. この場を借りて改めて感謝申し上げます.

参考文献

- [AMT24] Taiga Adachi, Kosuke Mizuno, and Sohei Tatenno, *Iwasawa theory for weighted graphs*, Preprint, arXiv:2412.01612v2 (2024).
- [CM81] Albert A. Cuoco and Paul Monsky, *Class numbers in $\mathbf{Z}_p^d$ -extensions*, Math. Ann. **255** (1981), no. 2, 235–258. MR 614400
- [DV23] Sage DuBose and Daniel Vallières, *On $\mathbb{Z}_\ell^d$ -towers of graphs*, Algebr. Comb. **6** (2023), no. 5, 1331–1346. MR 4668931
- [EHSW06] David Emms, Edwin R. Hancock, Simone Severini, and Richard C. Wilson, *A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant*, Electron. J. Combin. **13** (2006), no. 1, Research Paper 34, 14. MR 2212507

- [Gon21] Sophia R. Gonet, *Jacobians of Finite and Infinite Voltage Covers of Graphs*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2021, Thesis (Ph.D.)—The University of Vermont and State Agricultural College. MR 4257412
- [Gon22] ———, *Iwasawa theory of Jacobians of graphs*, *Algebr. Comb.* **5** (2022), no. 5, 827–848. MR 4511153
- [GV24] Rusiru Gambheera and Daniel Vallières, *Iwasawa theory for branched $\mathbb{Z}_p$ -towers of finite graphs*, *Doc. Math.* **29** (2024), no. 6, 1435–1468. MR 4831263
- [Iwa59] Kenkichi Iwasawa, *On Γ -extensions of algebraic number fields*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 183–226. MR 124316
- [Kat24a] Takenori Kataoka, *Fitting ideals of Jacobian groups of graphs*, *Algebr. Comb.* **7** (2024), no. 3, 597–625.
- [Kat24b] ———, *Kida’s formula for graphs with ramifications*, Preprint, arXiv:2407.16934v1 (2024).
- [KM24a] Sören Kleine and Katharina Müller, *On the growth of the Jacobians in $\mathbb{Z}_p^l$ -voltage covers of graphs*, *Algebr. Comb.* **7** (2024), no. 4, 1011–1038. MR 4804582
- [KM24b] Debanjana Kundu and Katharina Müller, *Iwasawa theory of graphs and their duals*, Preprint, arXiv:2410.11704 (2024).
- [KS12] Norio Konno and Iwao Sato, *On the relation between quantum walks and zeta functions*, *Quantum Inf. Process.* **11** (2012), no. 2, 341–349. MR 2897588
- [Mon81] Paul Monsky, *On p -adic power series*, *Math. Ann.* **255** (1981), no. 2, 217–227. MR 614398
- [MS03] Hirobumi Mizuno and Iwao Sato, *On the weighted complexity of a regular covering of a graph*, *J. Combin. Theory Ser. B* **89** (2003), no. 1, 17–26. MR 1999734
- [MS04] ———, *Weighted zeta functions of graphs*, *J. Combin. Theory Ser. B* **91** (2004), no. 2, 169–183. MR 2064866
- [MV23] Kevin McGown and Daniel Vallières, *On abelian ℓ -towers of multigraphs II*, *Ann. Math. Qué.* **47** (2023), no. 2, 461–473. MR 4645700
- [MV24] ———, *On abelian ℓ -towers of multigraphs III*, *Ann. Math. Qué.* **48** (2024), no. 1, 1–19. MR 4718567
- [RV22] Anwesh Ray and Daniel Vallières, *An analogue of Kida’s formula in graph theory*, Preprint, arXiv:2209.04890 (2022).
- [Sat07] Iwao Sato, *A new Bartholdi zeta function of a graph*, *Int. J. Algebra* **1** (2007), no. 5-8, 269–281. MR 2343001
- [Ter11] Audrey Terras, *Zeta functions of graphs*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 128, Cambridge University Press, Cambridge, 2011, A stroll through the garden. MR 2768284
- [Val21] Daniel Vallières, *On abelian ℓ -towers of multigraphs*, *Ann. Math. Qué.* **45** (2021), no. 2, 433–452. MR 4308188